PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA-LA MANCHA

JUNIO – 2016

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puede utilizar cualquier tipo de calculadora.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x)=x^3+3x^2+ax-6, a\in R$, se pide:

a) Determina el valor del parámetro $a\in R$ para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en su punto de inflexión sea -3.

b) Para el valor del parámetro encontrado, calcular los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

----

a)

Una función polinómica de tercer grado tiene un punto de inflexión para los valores de x que anulan su segunda derivada.

$$f'(x)=3x^2+6x+a. \qquad f''(x)=6x+6.$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 6x+6=0;\ \ 6(x+1)=0 \Rightarrow x=-1.$$

La función $f(x)$ tiene un punto de inflexión para $x=-1$.

La pendiente de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x)=m=-3 \Rightarrow 3\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+a=-3;\ \ 3-6+a=-3;$$

$$-3+a=-3 \ \Rightarrow\ \underline{a=0}.$$

b)

Para $a=0$ la función resulta: $f(x)=x^3+3x^2-6$.

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0;\ \ 3x(x+2) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 0, x_2 = -2}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ paa\ x = 0 \\ f''(-2) = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ paa\ x = -2 \end{cases}.$$

$$f(0) = -6 \ \ \Rightarrow \ \ \underline{Mínimo: A(0, -6)}.$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 6 = -8 + 12 - 6 = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Máximo: B(-2, -2)}.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en R y los puntos máximo y mínimo obtenidos, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-2, 0)}.$$

****

2º) Calcula la integral definida: $I=\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\frac{\cos\sqrt{x}}{2}\cdot dx$. Nota: Puede ayudarte hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$ y a continuación aplicar integración por partes.

$$I=\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\frac{\cos\sqrt{x}}{2}\cdot dx\left\{\begin{array}{c}\sqrt{x}=t\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot dx=dt\\ dx=2t\cdot dt\end{array}\right|\left.\begin{array}{c}x=\frac{\pi^2}{4}\rightarrow t=\frac{\pi}{2}\\ x=0\rightarrow t=0\end{array}\right\}\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{2}\cdot 2t\cdot dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\cos t\cdot dt\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}u=t\rightarrow du=dt\\ dv=\cos t\cdot dt\rightarrow v=sen\ t\end{array}\right\}\Rightarrow\left[t\cdot sen\ t-\int sen\ t\cdot dt\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\left[t\cdot sen\ t+\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left[\frac{\pi}{2}\cdot sen\ \frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right]-\left[0\cdot sen\ 0+\cos 0\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot 1+0-1=\frac{\pi-2}{2}.$$

$$\underline{I=\int_0^{\frac{\pi^2}{2}}\frac{\cos\sqrt{x}}{2}\cdot dx=\frac{\pi-2}{2}}.$$

****

3º) $a)$ Discute el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - y + mz = 0 \\ 4x - 3y + 2z = m \\ -mx + y - z = 1 - m \end{cases}$ en función del parámetro $m \in R$.

$b)$ Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 4 & -3 & 2 \\ -m & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m & 0 \\ 4 & -3 & 2 & m \\ -m & 1 & -1 & 1-m \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 4 & -3 & 2 \\ -m & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 4m + 2m - 3m^2 - 2 - 4 =$$

$$= -3m^2 + 6m - 3 = 0;\ \ m^2 - 2m + 1 = 0;\ \ (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1.$$

$$\underline{Para\, m \neq 1\ \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\, m = 1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A' = 2}.$$

$$\underline{Para\, m = 1\ \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $m = 1$ el sistema resulta: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$, equivalente al siguiente sistema: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Haciendo $z = \lambda$: $\left.\begin{matrix} x - y = -\lambda \\ 4x - 3y = 1 - 2\lambda \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} -3x + 3y = 3\lambda \\ 4x - 3y = 1 - 2\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 1 + \lambda.$

$y = x + \lambda = 1 + \lambda + \lambda = 1 + 2\lambda.$

$\underline{Solución: x = 1 + \lambda, y = 1 + 2\lambda, z = \lambda,\ \forall\lambda \in R.}$

****

4º) Sea r la recta determinada por el punto $P(1,0,1)$ y el vector $\overrightarrow{v_r} = (1,-1,0)$.

a) Calcula el punto de r más cercano al punto $Q(0,0,1)$.

b) Calcula el punto simétrico de Q respecto a r.

----

a)

El haz de planos perpendiculares a r es de la forma $\beta \equiv x - y + D = 0$.

De los infinitos planos pertenecientes al haz β, el plano π que contiene al punto $Q(0,0,1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv x - y + D = 0 \\ Q(0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - y = 0.$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

El punto M, intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:

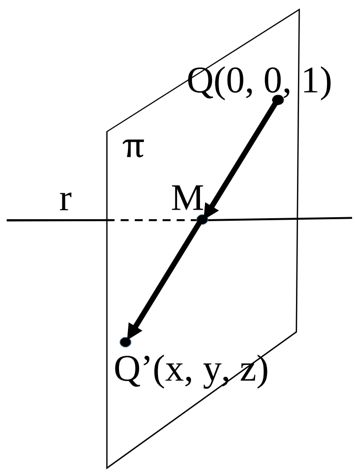
$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases} \\ \pi \equiv x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda) - (-\lambda) = 0;\ \ 1 + \lambda + \lambda = 0;\ \ 2\lambda = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)}.$$

<u>*El punto de r más próximo a* $Q(0,0,1)$ *es* $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.</u>

b)

Para que Q’ sea el simétrico de Q con respecto a r tiene que cumplirse que:



$$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{MQ'} \Rightarrow [M - Q] = [Q' - M];$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) - (0,0,1)\right] = \left[(x,y,z) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right];$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\rightarrow x=1 \\ y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\rightarrow y=1 \\ z-1=0\rightarrow z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{Q'(1,1,1)}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Enuncia los teoremas de Bolzano y Rolle.

b) Razona que la ecuación $2e^x + x^5 = 0$ tiene al menos una solución real.

c) Razona que, de hecho, dicha solución es única.

----

a)

El teorema de Bolzano dice que “si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$”.

El teorema de Rolle dice que “si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$”.

b)

Probar lo pedido es equivalente a demostrar que la función $f(x) = 2e^x + x^5$ tiene al menos una solución real.

La función $f(x)$ es continua y derivable en su dominio, que es R, por ser la suma de dos funciones continuas y derivables en R, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano en cualquier intervalo cerrado que se considere, por ejemplo, $[-2, 0]$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = 2 \cdot e^{-2} + (-2)^5 = \frac{2}{e^2} - 32 < 0 \\ f(0) = 2 \cdot e^0 + 0 = 2 \cdot 1 = 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{-2}, \boldsymbol{0}] \Rightarrow \boldsymbol{f(c) = 0}.$$

$\underline{\textit{Lo anterior prueba que } 2e^x + x^5 = 0 \textit{ tiene al menos una solución real.}}$

c)

Ya se ha probado que la ecuación $2e^x + x^5 = 0$ tiene al menos una solución real; ahora se debe demostrar que esa raíz es única.

Teniendo en cuenta la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ y que:

$f'(x) = 2e^x + 5x^4 > 0, \forall x \in R$, lo cual significa que la función es monótona creciente lo que implica que tenga más de una solución.

$\underline{\textit{Queda demostrado lo pedido.}}$

****

2º) a) Calcula el área de la región acotada por las gráficas de las siguientes parábolas: $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 11$.

b) Calcula $c \in R$ para que las rectas tangentes a las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisas $x = e$ tengan la misma pendiente.

Los puntos de corte de las dos parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

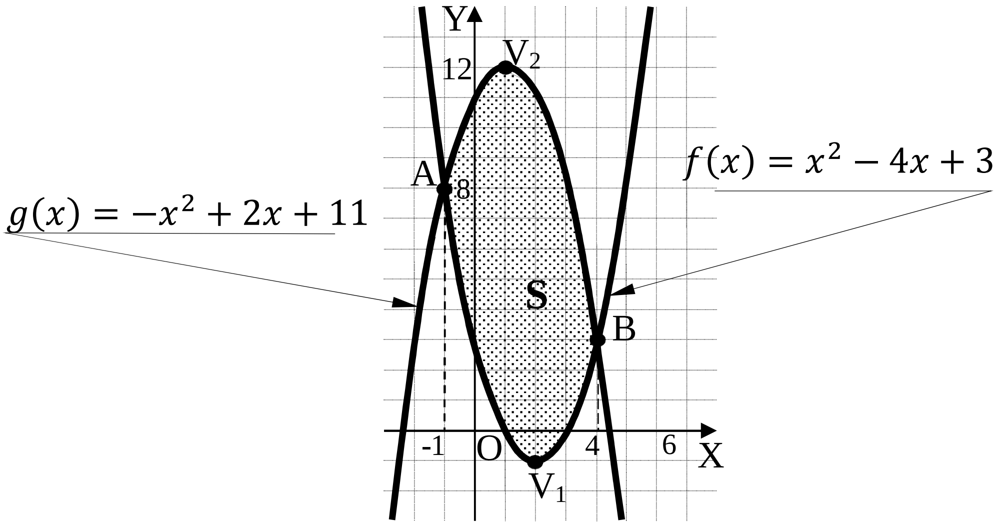
$$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 11;\;\; 2x^2 - 6x - 8 = 0;\;\; x^2 - 3x - 4 = 0;$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow \boldsymbol{A(-1, 8)} \\ x_2 = 4 \rightarrow \boldsymbol{B(4, 3)} \end{cases}.$$

Los vértices de las parábolas son los siguientes:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \;\rightarrow\; V_1(2, -1).$$

$$g'(x) = -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1 \;\rightarrow\; V_2(1, 12).$$



La representación gráfica, aproximada, de la situación es la indicada en la figura.

En el intervalo correspondiente al área a calcular, todas las ordenadas de la parábola $g(x) = -x^2 + 2x + 11$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x) = x^2 - 4x + 3$, por lo cual el área a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{4} [(-x^2 + 2x + 11) - (x^2 - 4x + 3)]dx = \int_{-1}^{4} (-2x^2 + 6x + 8)dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + 8x\right]_{-1}^{4} = \left[-\frac{2x^3}{3} + 3x^2 + 8x\right]_{-1}^{4} =$$

$$= \left(-\frac{2\cdot 4^3}{3} + 3\cdot 4^2 + 8\cdot 4\right) - \left[-\frac{2\cdot(-1)^3}{3} + 3\cdot(-1)^2 + 8\cdot(-1)\right] =$$

$$= -\frac{128}{3} + 48 + 32 - \frac{2}{3} - 3 + 8 = 85 - \frac{130}{3} = \frac{255-130}{3} = \frac{125}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{125}{3}\ u^2.}$$

$b)$

Por ser la pendiente a una recta en un punto igual que el valor de su derivada en ese punto, se trata de igualar los valores de las respectivas derivadas:

$$\left.\begin{array}{r} f'(x) = 2x - 4 \\ g'(x) = -2x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) = g'(x) \Rightarrow 2x - 4 = -2x + 2;\ 4x = 6;\ 2x = 3.$$

$$\underline{El\ valor\ pedido\ es\ x = \frac{3}{2}.}$$

****

3º) Sabiendo que $|D| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 10$, donde $x, y, z, a, b, c \in R$, calcula los siguientes determinantes: $|M| = \begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix}$ y $|N| = \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta.

$$|M| = \begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x & y & z \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ 4 & 4 & 6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} = A + B.$$

$$A = 7 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = \frac{7}{5} \cdot 10 = \mathbf{14}.$$

$$B = 7 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = \frac{14}{5} \cdot 0 = \mathbf{0}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos de A y B:

$$\underline{|M| = \begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} = 14.}$$

$$|N| = \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 3x & y & z \\ 3a & 2b & 3c \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & 2b & 3c \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -15 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = -15 \cdot 10 = -150.$$

(Nótese que el valor no cambia de signo por haber intercambiado dos líneas entre si dos veces)

$$\underline{|N| = \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -150.}$$

En la realización de los dos apartados del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

4ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

****

4º) Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y + 2z = 2$, $\pi_2 \equiv x + y + z = 0$ y $\pi_3 \equiv x + ay + z = a$, donde $a \in R$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de los planos anteriores en función del parámetro a.

b) Para $a = 1$, calcular la distancia entre π_2 y π_3.

----

a)

Los tres planos determinan las siguientes matrices de coeficientes y ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Según que los rangos de estas matrices, la posición relativa de los planos son las siguientes:

1º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.$

2º. -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ son\ secantes\ dos\ a\ dos.$

3º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.$

4º. -- $Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ son\ paralelos.$

5º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 1 \Rightarrow Los\ planos\ son\ coincidentes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a + 2a + 1 - 2 - a^2 - 1 = -a^2 + 3a - 2 = 0;$$

$a^2 - 3a + 2 = 0;\ \ x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{a_1 = 1, a_2 = 2}.$

$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.}$

$$Para\ a = 1\ es\ M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 2 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M' = 3}.$$

$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = 2; Rang\ M' = 3 \Rightarrow \pi_2\ y\ \pi_3\ paralelos\ y\ secantes\ a\ \pi_3.}$

$$Para\ a=2\ es\ M'=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 2\\1 & 1 & 1 & 0\\1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\1 & 1 & 0\\1 & 2 & 2\end{vmatrix}=4-4-2+2=0\Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M'=2.}$$

$$\underline{Para\ a=2\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2\Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.}$$

$b)$

Para $a=1$ los planos π_2 y π_3 son paralelos:

$\pi_2\equiv x+y+z=0$ y $\pi_3\equiv x+y+z=1$.

La distancia entre dos planos paralelos es $d(\pi_2,\pi_3)=\frac{|D_2-D_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$:

$d(\pi_2,\pi_3)=\frac{|D_2-D_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\underline{d(\pi_2,\pi_3)=\frac{\sqrt{3}}{3}\ unidades.}$$

****